# कागज मोड़ें,गणित सीखें

वी एस एस शास्त्री



किसी बच्ची को किसी खास तरीके से एक कागज को मोड़ने के लिए कहें तो वह पलटकर तुरन्त पूछेगी कि, ''मैं ऐसा क्यों करूँ?'' उसे यह एक बोझ, एक जबरदस्ती का काम या एक ऊबाऊ अभ्यास की तरह लगता है। लेकिन उसी बच्ची को यदि कागज को मोड़ कर एक नाव या चिड़िया बनाने के लिए कहें, और उसे थोड़ा मार्गदर्शन दे दें, तो वह तुरन्त यह करना शुरू कर देगी और खुशी–खुशी उसे सीखना चाहेगी। मॉडल को बना लेने के बाद उस लड़की को यह बताने की कोशिश करें कि उस मॉडल को खोलने के बाद वह उसमें क्या–क्या (जैसे कोण, क्षेत्र, रेखा आदि) देख सकती है। इसमें निश्चित ही एक नई चीज खोज लेने का तत्व शामिल हो जाएगा। और ऐसा होते ही यह प्रक्रिया मजेदार हो जाती है।

कागज को मोड़ना और अलग–अलग आकृतियाँ बनाना एक कला है जिसे ऑरिगामी कहते हैं। कागज के इस तरह बनाए गए कुछ मॉडलों में दस–बीस नहीं बल्कि कई सौ मोड़ होते हैं। कुछ जटिल मॉडलों में तो दो या तीन अलग–अलग मोड़ी गई आकृतियों को आपस में जोड़ना पड़ता है।

ऑरिगामी के जरिये गणित समझना नियमित संरचनाओं के संसार को देखने का एक रोमांचक अनुभव है, जो वाकई में बच्चे की आँखों के सामने 'खुलता' है। यह खोजबीन गणित की अमूर्त अवधारणाओं को एक मजेदार तरीके से स्पष्ट करने में मदद करती है। आइए हम कुछ आसान मॉडलों को देखें। इस उद्देश्य के लिए मैं उन ऑरिगामी मॉडलों को इस्तेमाल करना पसन्द करूँगा जिनमें आठ से अधिक मोड़ न हों। आसान और छोटे ऑरिगामी मॉडल गणित सीखने के लिए आदर्श होते हैं।

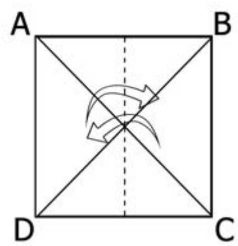
हमारे देश में ऑरिगामी एक लोक कला बन तो गई है लेकिन बड़े पैमाने पर इसका अभ्यास नहीं किया जाता। आजकल कोई बच्चों को यह नहीं सिखाता कि कागज को मोड़ कर किस प्रकार नाव, कप, चिड़िया आदि बनाई जाती हैं। यदि बच्चों को स्कूल में अपने मित्रों से यह सीखने को मिल जाए तो इसे उनका सौभाग्य समझिए।

> *''इस प्रकार यह साधारण मोर वास्तव में गणित की दस से भी अधिक अवधारणाओं की व्याख्या सुलभ कराने तक ले जाता है। गणित के पाठ्यक्रम से जुड़े इस प्रकार के कई मॉडल हैं। बच्चों द्वारा बनाए जा सकने वाले सैकड़ों सस्ते मॉडल इन अवधारणाओं को सुदृढ़ बना देंगे।''*

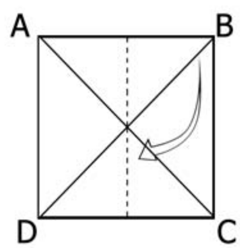
यहाँ मैं कुछ ऐसे उदाहरण दे रहा हूँ जिनमें सरल ऑरिगामी मॉडलों द्वारा दर्शाई जा सकनेवाली कुछ गणितीय अवधारणाओं को सचित्र रूप से व्यक्त किया गया है।

## कागज का मोर

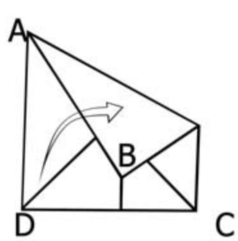
इन रेखाचित्रों का अनुसरण करते हुए एक मोर बनाएँ। आप देखेंगे कि यहाँ इस्तेमाल किए गए संकेत सरल और अपने आप समझ में आ जाने वाले हैं।



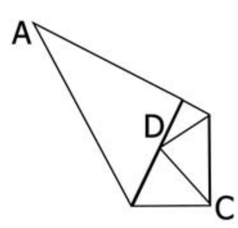

एक 10 से.मी. x 10 से.मी. के वर्गाकार कागज से शुरू करें जिसे कर्ण पर से मोड़कर उसकी धारी बना दी गई है। इसे चित्र में दिखाए ढंग से बीच में से मोड़ लें।



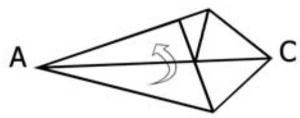

बिन्दु 'ब' को नीचे लाते हुए बीच की रेखा तक मोड़ें।




बिन्दु 'द' को ऊपर की तरफ मुड़ी हुई किनारी तक मोड़ें।



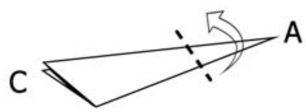

परिणामस्वरूप ऐसी आकृति बनती है।



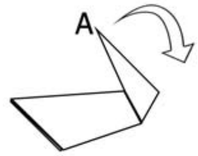

अब फिर 'अस' पर से मोड़ें।



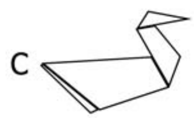

मॉडल को पूरा घुमा लें।




बिन्दु 'अ' को पीछे की ओर मोड़ें।




फिर बिन्दु 'अ' को वापिस आगे की ओर लाते हुए बीच में से मोड़ें।

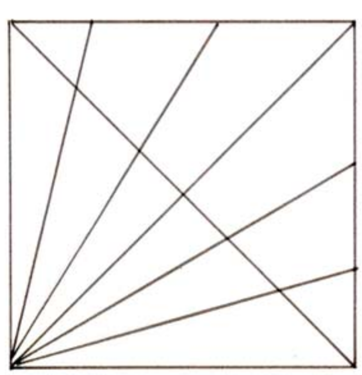


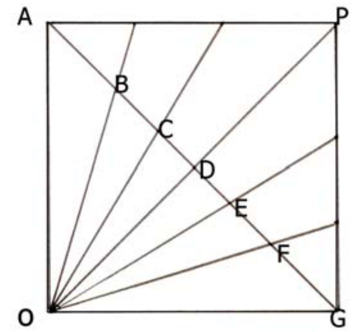

'स' को नीचे झुकाकर मोर की पूंछ बनाएँ।



मोर

एक वर्गाकार कागज को मोड़ कर मोर का मॉडल बनाने के बाद बच्ची उससे खेलने लगती है। कभी–कभी वह मॉडल को फाड़ भी सकती है। बच्ची को मॉडल को खोलने के लिए प्रोत्साहित करें ताकि कागज फिर से वर्गाकार हो जाए। लेकिन कागज में बनाए गए मोड़ अपनी धारियाँ छोड़ जाते हैं – सीधी रेखाएँ, क्षेत्र, कोण आदि। इन रेखाओं को पेंसिल फेर कर गाढ़ा कर लें। तब आप यह देखेंगे.....






यहाँ कोण ADG = 90 डिग्री है जिसे 15–15 डिग्री के छह भागों में विभाजित किया गया है। आइए हम यहाँ बननेवाले सभी कोणों को देखें। हमें यहाँ छह कोण मिलते हैं (90 के अलावा 15, 30, 45, 60, 75) और उन्हें मापने के लिए हमें चाँदे का उपयोग करने की आवश्यकता नहीं होती। यह अपने आप में ही बच्चे के लिए एक विस्मयकारी बात है। यही नमूना निम्नलिखित बातों को सचित्र रूप से स्पष्ट करने के लिए इस्तेमाल किया जा सकता है

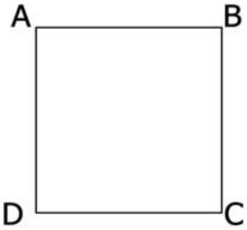
1. कोणों का विभाजन
2. अधिक और न्यून कोण
3. न्यून कोण त्रिभुज
4. अधिक कोण त्रिभुज
5. समद्विबाहु त्रिभुज
6. समबाहु त्रिभुज
7. समद्विबाहु समकोण त्रिभुज
8. त्रिभुज में तीन कोणों का योग 180 डिग्री होता है
9. त्रिभुज के आन्तरिक विपरीत कोणों का योग उसके बाह्य कोण के बराबर होता है
10. संगत कोण
11. विपरीत शीर्ष कोण

इस प्रकार यह साधारण मोर वास्तव में गणित की दस से भी अधिक अवधारणाओं की व्याख्या सुलभ कराने तक ले जाता है। गणित के पाठ्यक्रम से जुड़े इस प्रकार के कई मॉडल हैं। बच्चों द्वारा बनाए जा सकनेवाले सैकड़ों सस्ते मॉडल इन अवधारणाओं को सुदृढ़ बना देंगे।

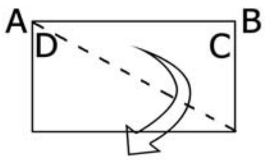
## कागज को मोड़ कर सप्तभुज बनाना

एक सप्तभुज (सात भुजाओं वाला बहुभुज) बनाना बहुत कठिन होता है, क्योंकि एक नियमित सप्तभुज का आन्तरिक कोण 128.57 डिग्री होता है। यह किसी भी चाँदे द्वारा परिशुद्धता से नहीं नापा जा सकता। लेकिन आप बराबर लम्बाई की सात सींकों को उनके छोरों को सटाते हुए जमाकर, या एक कागज पर, बार–बार गलती और कोशिश की प्रक्रिया का पालन करते हुए, सात बराबर रेखाओं को खींचकर एक सप्तभुज बना सकते हैं।

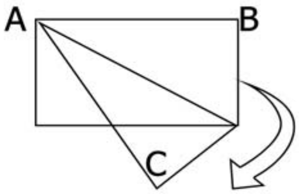
लेकिन ऑरिगामी तकनीकों का इस्तेमाल करके 128.57 डिग्री का यह कोण बड़ी आसानी से प्राप्त किया जा सकता है। एक चौकोर कागज से यह कोण प्राप्त करने के लिए चित्रों द्वारा नीचे समझाए गए चरण काफी होंगे।



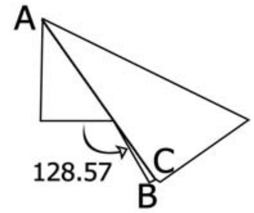

अ ब स द से चिन्हित एक वर्गाकार कागज से शुरू करें।




स द किनारी को मोड़कर अब उपर ले आएँ।




ब स बिन्दु को नीचे लाते हुए अ से शुरू होनेवाले कर्ण पर मोड़ें।




दर्शाया गया कोण 128.57 डिग्री का है।

इस प्रकार से मुड़ी हुई सात शीटों को आपस में जोड़ कर हम वास्तव में एक नियमित सप्तभुज बना सकते हैं।

भविष्य में एक ऐसे स्कूल की कल्पना करना सम्भव है जहाँ निचली कक्षाओं में ऑरिगामी को मजे के लिए सिखाया जाता हो। बच्चे एक वर्ष में आठ से दस मॉडलों को सीख सकते हैं। इन्हीं मॉडलों का इस्तेमाल करते हुए अगली कक्षा में गणित सिखाया जा सकता है। ऐसा सीखना एक बोझ नहीं लगेगा। कागज को मोड़ कर गणित सीखना ऊँची कक्षाओं में भी सम्भव है। वास्तव में कक्षा दस तक की गणित की अवधारणाओं को समझाने के लिए कर्नाटक राज्य विज्ञान परिषद, बैंगलौर ने एक किताब प्रकाशित की है जिसका शीर्षक है ''डेस्क बुक ऑन मैथेमेटिक्स थ्रू ऑरिगामी''।

## ऑरिगामी

ऑरिगामी एक प्राचीन कला है जिसका जापान में अभ्यास किया जाता है। यह शब्द 'ऑरि' यानी मोड़ना और 'कामी' यानी कागज से निकला है। पुराने समय में ऑरिगामी नमूनों को कुछ धार्मिक कामों में इस्तेमाल किया जाता था। लेकिन बाद में उसे सिर्फ पूर्ण आनन्द और मजे के लिए इस्तेमाल किया जाने लगा। कहा जाता है कि कागज को मोड़ने की यह कला चीन से जापान में आई। वहाँ अन्तिम संस्कार के समय कागज की नावों को रखा जाता था ताकि वे आत्माओं को इस संसार के पार ले जाएँ।

19वीं शताब्दी में जापान में अमरीकी प्रवेश के बाद जापानी कला और शिल्प को पश्चिम में भी पहचाना जाने लगा जहाँ कागज मोड़ने की कला के लिए नया शब्द 'ऑरिगामी' गढ़ा गया। प्रारम्भ में उसे सिर्फ 'कागज की आकृतियों' की तरह जाना जाता था। उसके बाद से कागज मोड़ने की कला का तेजी से विकास हुआ। अब कई ऑरिगेमी संघ हैं और जादूगर भी अपने प्रदर्शनों में कागज मोड़ने की कला का प्रदर्शन करते हैं। विश्व भर में हर साल नियमित रूप से ऑरिगामी प्रदर्शन आयोजित किए जाते हैं। अब कम्प्यूटर के ऐसे सॉफ्टवेयर विकसित किए गए हैं जो वांछित आकृति बनाने के लिए कागज मोड़ने के निर्देशों को क्रम से दिखाते हैं।

कागज मोड़ने का काम करनेवाली कुछ अन्य संस्कृतियाँ भी रही हैं। दक्षिण स्पेन में अरब लोगों की बड़ी जनसंख्या है जिन्हें मूर कहते हैं। ये लोग इस प्रकार के शिल्प जैसे गहने बनाना, धातु का काम, पत्थर का काम आदि के अभ्यस्त होते हैं। वे इस्लाम धर्म के अनुयायी हैं। इसलिए उनकी कला में मानवीय आकृतियों की प्रधानता नहीं होती। उनकी कला रेखाओं, कोणों और ज्यामितीय डिज़ाइनों से भरपूर होती हैं। ये शिल्पकार ज्यामितीय डिजाइनों को गणित की ज्यामिति के जरिये नहीं बल्कि कागज के मोड़ने के जरिये सीखते हैं। वे संरचनाओं की पुनरावृत्ति पर या, जैसा गणित में इसे कहा जाता है, 'टैसेलेशन' पर निर्भर करते हैं। ये डिजाइनें इनके सभी शिल्पों में पुनरावृत्त होती हैं। मुगल काल में दिल्ली और आगरा में इन मूर लोगों को इमारतों को सजाने के लिए बुलाया जाता था। मुगल स्मारकों में बनाई गई खिड़कियों की महीन जाली का काम इन्हीं कलाकारों का किया हुआ है। ऑरिगामी जानकारों के बीच स्पेन की कागज मोड़ने की तकनीक मूर परम्परा के नाम से जानी जाती है।

अमेरिका के गणित के शिक्षकों की राष्ट्रीय परिषद ने अल्बर्ट विश्वविद्यालय के एक गणितज्ञ पॉल्सन को गणित और कागज के विषय पर जो कुछ उपलब्ध था उसे संकलित करने का काम सौंपा। इस गणितज्ञ ने उस समय तक प्रकाशित सभी शोधपत्रों को देखा और 60 पेजों की एक पुस्तिका लिखी जिसमें सम्बन्धित सामग्री सम्पूर्ण रूप से मौजूद थी। इसका पुनर्मुद्रित भारतीय संस्करण मैथेमेटिकल साइंस ट्रस्ट सोसाइटी, सी 766, न्यूफ्रेंडस कॉलोनी, नई दिल्ली के पास उपलब्ध है।

### सुन्दर राव : भारत के अग्रदूत

सुन्दर राव 1870 में चेन्नई के रोयापेट्टा हाई स्कूल में हेड मास्टर थे। वे गणित के बहुत अच्छे शिक्षक रहे होंगे। हमें बताया गया है कि सेवानिवृत्त होने के बाद एक दिन वे एक डिपार्टमेंटल स्टोर में गए। वे अपने पोतों के लिए एक अच्छा उपहार खोज रहे थे। उन्हें एक गिफ्ट पैक मिला जिसमें रंगीन कागज और एक छोटी किताब थी, जिसमें बताया गया था कि कागजों को किस तरह मोड़ कर विभिन्न पशुओं, चिड़ियाओं आदि का आकार बनाया जा सकता है। सुन्दर राव ने गणित के शिक्षक होने के नाते इन मुड़ी हुई आकृतियों को खोलने और कागज को समतल करने के बाद उस पर बनी रेखाओं, कोणों और क्षेत्रों को देखा। जल्दी ही उन्होंने इन संरचनाओं को उन प्रमेयों, लेमों, निर्माण कार्यों आदि से जोड़ना शुरू किया जिन्हें वे अपने पूरे कार्यकाल में पढ़ाते रहे थे। सेवानिवृत्त हेड मास्टर ने कागज के मोड़ों से जो भी सम्भव हो सकता है उसे लिखना शुरू किया। उन्होंने इसमें ज्यामिति के पूरे पाठ्यक्रम को समाहित कर दिया। वे कागज मोड़ने से गणित के और तथ्यों को भी जोड़ सके। इस तरह एक अद्भुत किताब तैयार हुई जिसका नाम था ''ज्योमैट्रिक कंस्ट्रकशन्स इन पेपर फोल्डिंग'' और इसे 1893 में प्रकाशित किया गया।

यह दुनिया में अपनी तरह की पहली किताब थी और दुनिया भर के गणित शिक्षकों और अध्यापकों का ध्यान इसने अपनी ओर खींचा। अमेरिका के गणित शिक्षक संघ को इस किताब के बारे में जर्मनी की एक पत्रिका में छपी टिप्पणी के जरिये पता चला। उन्होंने दो मशहूर गणित शिक्षकों को इस किताब को अमेरिका के पाठकों के लिए उपयुक्त बनाने के लिए उसका सम्पादन करने की जिम्मेदारी सौंपी। इस सम्पादित संस्करण का 47 बार प्रकाशन हुआ और आज भी दुनिया भर में इसे बार–बार छापा जा रहा है। लेकिन इस मौलिक पुस्तक के बारे में भारत में कोई जानकारी नहीं है – जहाँ के बच्चों के लिए सुन्दर राव ने सबसे पहले इसे प्रकाशित किया था। जिन लोगों को इस पुस्तक में दिलचस्पी हो वे इसे मुफ्त में www.arvindguptatoys.com वेबसाइट से डाउनलोड कर सकते हैं।

---

**वीएसएस शास्त्री** *एक बैंक अधिकारी हैं। उनकी गणित में गहरी दिलचस्पी है। उन्होंने गणित और उससे सम्बद्ध गतिविधियों पर बच्चों के लिए 12 पुस्तकें लिखी हैं। उनकी पुस्तक ''ऑरिगामी फन एण्ड मैथेमेटिक्स'' (जो तीसरी बार मुद्रित हुई है) नई दिल्ली के विज्ञान प्रसार ने प्रकाशित की है। इसमें दसवीं कक्षा तक गणित पढ़ाने के लिए कागजों की विभिन्न आकृतियों की जानकारी दी गई है। उन्होंने शिक्षकों के लिए 300 से अधिक कार्यशालाओं का आयोजन किया है। एरो मॉडलिंग, किरिगामी और पतंगें उनकी दिलचस्पी के अन्य विषय हैं। उनसे* vsssastry@gmail.com *ईमेल पते पर सम्पर्क किया जा सकता है।*

## तर्क–गणित की दिमागी कसरतें

अजय नदी पर पानी लेने के लिए गया। उसके पास दो बाल्टियाँ हैं इन में से एक की क्षमता 11 लीटर पानी की है तथा दूसरी की 6 लीटर। समस्या यह है कि अजय को कुल 4 लीटर पानी लेकर आना है। इस समस्या का समाधान करने के लिए अजय की मदद कीजिए।

इस स्थान का उपयोग गणना हेतु करें। 🙂